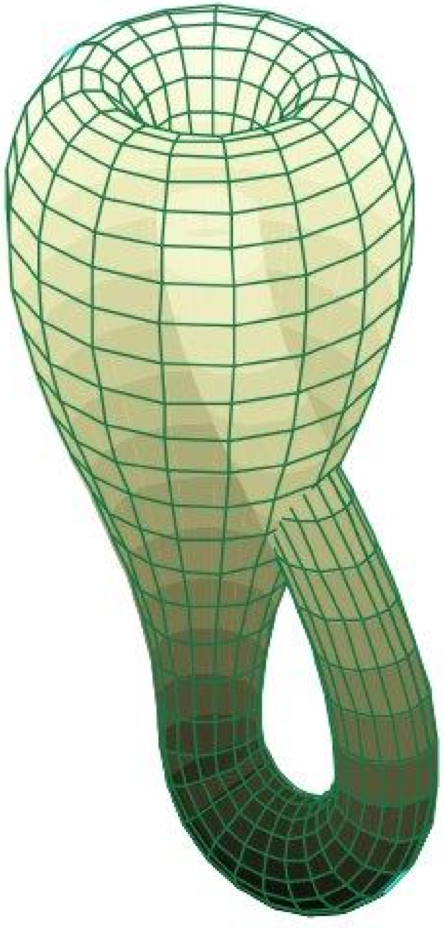
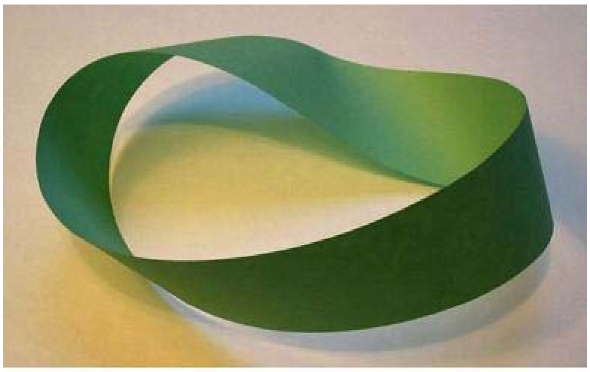
Una solución elegante

Hace ya unos cuantos años, me encontré con uno se esos juegos matemáticos que suelen aparecer en las revistas de divulgación científica (si no recuerdo mal en “Investigación y Ciencia”).

Me llamó la atención, en primer lugar por la presentación del mismo, a través de un pequeño cuento. El protagonista encontraba una botella de Klein. Para quien sea la primera vez que oye hablar de ella, diré que en topología se define como una *superficie no orientable cerrada de característica de Euler igual a 0 que no tiene ni exterior ni interior*. Definición que pongo para las mentes privilegiadas que puedan leer esto. Para los demás, lo más interesente es la última parte de la definición, o sea *que no tiene ni interior ni exterior*. Ello es posible debido a que esta construcción matemática es un objeto de tres dimensiones en un espacio de cuatro. Es decir, algo parecido a la banda de Möbius, que podemos hacer con un trozo de papel y un poco de celo, cuya característica principal es la de poseer una sola cara (ver foto).



Botella de Klein



Banda de Möbius

El cuento seguía con la aparición de un genio de las matemáticas que, en agradecimiento al hecho de haber sido liberado de la botella, le ofrecía la solución al problema que el protagonista deseara. Este piensa inmediatamente en la conjetura de Fermat (hoy teorema tras al demostración de Andrew Wiles y la colaboración de Richard Taylor). Para quien no la recuerde dice: para $\mathbf{a^n = b^n + c^n}$ no existe solución para $\mathbf{n>2}$ en el ámbito de los números enteros.

El protagonista del cuento, entre aturdido y nervioso, se equivoca en su petición y la solución que solicita es la relativa a $\mathbf{n^a = n^b + n^c}$. El genio se la facilita y desaparece. Nuestro héroe se da cuenta, demasiado tarde, del error cometido.

La propuesta del juego es ¿Sabrías encontrar la solución a la petición del protagonista?

He de decir que le di muchas vueltas al problema y me costo bastante encontrar la solución. Pero creo que es elegante (desde un punto de vista matemático, claro está).

La primera parte fue fácil.

Repasemos la ecuación propuesta: $\mathbf{n^a = n^b + n^c}$

Por definición n es un número entero positivo(n>2) que puede ser par o impar. Si suponemos que es impar y recordando las reglas básicas matemáticas, $\mathbf{n^a}$ será también impar (**impar x impar = impar**). Al otro lado de la igualdad tenemos $\mathbf{n^b}$ y $\mathbf{n^c}$ que, por las mismas razones, son también impares. Pero la suma de dos impares siempre es par, por tanto la ecuación no puede tener solución para n impar. Acabamos de eliminar la mitad de los números naturales mayores que 2.

Los pares mayores que dos me dieron bastantes más problemas. No lograba ver como reducir el conjunto de los pares a una solución semejante a la encontrada para los impares, pero intuía que ese era el camino.

Tenía el problema a medio resolver y, a ratos perdidos, cogía papel y lápiz y volvía a la carga, pero si hallar solución alguna. Justo cuando ya me planteaba el abandono y sin venir a cuento, se hizo la luz y di con una nueva solución para todos los casos, pares o impares.

Cogí la ecuación $\mathbf{n^a = n^b + n^c}$ y suponiendo que el elemento $\mathbf{n^c}$ es el menor (uno de los dos elementos del segundo miembro de la ecuación tiene que ser el menor de todos, por lo que la elección de uno de ellos es arbitraria) y procedemos como sigue:

$$\mathbf{n^a / n^c = n^b / n^c + n^c / n^c}$$

El valor del último elemento es 1, por tanto

$$\mathbf{n^a / n^c = n^b / n^c + 1}$$

Recordemos que dos potencias que se dividen una a otra y comparten la misma base equivalen a la base elevada a la diferencia de exponentes, por tanto

$$\mathbf{n^{a-c} = n^{b-c} + 1}$$

Si a la diferencia “a-c” la llamamos “h” y a la “b-c” la llamamos “k”, nos queda

$$\mathbf{n^h = n^k + 1}$$

Si **n** es par, tenemos **par = par + 1** (incongruente). Si **n** es impar, **impar = impar + 1** (incongruente)

Surge una pregunta: Si hemos demostrado que no hay soluciones tanto para pares como para impares ¿Cómo puede haber soluciones para **n = 2**?

La respuesta es en realidad sencilla: 2 es el único número en que podemos sustituir el signo + por el x cuando la operación es consigo mismo (**2+2 = 2x2**). Por ello las soluciones posibles serán siempre de la forma $\mathbf{2^{a+1} = 2^a + 2^a}$